微积分进阶：从泰勒公式到多元微分

高等数学期末串讲

胡中山

北京大学经济学院

2025 年 12 月 19 日

课前推荐

如果你忘了极限是什么，看看这个视频

复杂极限：从洛必达到泰勒公式

- 洛必达法则 **(L'Hopital's Rule)**
  - 适用情形：$\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，其它形式可以转换为这两种。
  - 结论：若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ 且 $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$，且 $g'(x) \neq 0$ 在 x 充分接近 x_0 时成立，则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  - 局限性：求导后可能变得更复杂，或极限不存在。
- 泰勒公式 **(Taylor Formula)**
  - 本质：用多项式逼近函数。
  - 优势：将复杂的函数转化为幂函数，处理 $\frac{0}{0}$ 型极限的终极武器。
  - Peano 余项形式 $(x \to x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

泰勒公式的注意点

概念辨析：

- 泰勒公式 vs 麦克劳林公式：后者是前者在 $x_0 = 0$ 处的特例。
- 泰勒多项式 vs 泰勒公式：前者是不含余项的多项式，后者包含余项。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + o(x^n)$$

余项的选择

- 皮亚诺余项 $o((x-x_0)^n)$：仅表示误差是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小，用于计算极限和定性分析局部性质。
- 拉格朗日余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$：给出了误差的具体表达式（$\xi$ 在 x 与 x_0 之间），用于近似计算的误差估计和证明与高阶导数有关的不等式。
- 柯西余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$：较少使用。
- 积分余项 $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$：较少使用。
- 选择原则：计算极限时优先使用皮亚诺余项，若需估计误差则使用拉格朗日余项 (证明题常用)

期末考题

例：计算极限

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^4 x}{\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}-\sqrt{\cos x}}$$
.

- $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt\right)}{x^3}$$

期末考题

例：给出泰勒公式

- 求下列函数在点 $x=0$ 处的泰勒公式，至所指定的阶数：
  (1) $e^x \sin x$，四阶；
  (2) $\sqrt{1+x}\cos x$，四阶。
- 函数
$$f(x)=\frac{1-2x+5x^2}{(1-2x)(1+x^2)}$$
  在 $x=0$ 处的 $2n+1$ 阶泰勒公式。

多元函数的极限与连续

关键区别

一元函数仅有两个方向 ($x \to x_0^+, x \to x_0^-$)，而多元函数 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 有无穷多种逼近路径。

- 极限定义：
  1. 累次极限：$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ 或 $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$（先固定一个变量，再让另一个变量变化）
  2. 重极限：$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ （(x, y) 在二维平面上以任意方式趋于 (x_0, y_0)）
- 极限存在：沿任意路径逼近，函数值都趋于同一个数 A。
- 判断不存在：若找到两条路径（如 $y = kx$ 或 $y = x^2$），使得极限值不同，则极限不存在。
- 连续性：$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$。

偏导数 vs 全微分

- 偏导数 (**Partial Derivative**): $\frac{\partial f}{\partial x}$ 仅代表沿 x 轴方向的变化率，不代表函数在各方向的整体性质。
- 全微分 (**Total Differential**): 函数在某点“线性逼近”的存在性。

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

核心逻辑链条：

$$\text{可微} \implies \text{偏导存在 且连续}$$

$$\text{偏导存在} \not\Rightarrow \text{可微}, \quad \text{偏导存在} \not\Rightarrow \text{连续}$$

$$\text{偏导连续} \implies \text{可微 (充分条件)}$$

样题示例

有关偏导与全微分的计算与证明题

- 设函数 $f(x,y)=x^y\ (x,y>0)$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$。
- 求函数 $u=\left(\frac{y}{x}\right)^z$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的全微分。
- 证明：函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，$f_x(0,0)$、$f_y(0,0)$ 存在，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。

多元复合函数求导（链式法则）

全导数公式：设 $z=f(u,v)$，而 $u=\phi(x,y), v=\psi(x,y)$，则：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

记忆法：画出变量依赖关系的树状图，从因变量到自变量，路径相乘，分叉相加。

一阶全微分的形式不变性

若 $z=f(x,y)$，但此时 x,y 被视为 t 的函数 $x=u(t), y=v(t)$，则：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

方向导数与梯度

- 梯度 **(Gradient)**:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

梯度方向是函数变化率（增长）最大的方向。

- 方向导数：沿方向 $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的变化率：

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot \vec{l} = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta$$

当方向 $\vec{l}$ 与梯度方向一致时，方向导数取最大值 $|\nabla f|$。

期末考题

例：偏导数与可微性

- 定义三元函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

  回答下列问题.
  1. 求函数 $f(x,y,z)$ 在 $(0,0,0)$ 处的三个偏导数.
  2. $f(x,y,z)$ 在 $(0,0,0)$ 处是否可微？试证明之.
- 设在 $\mathbb{R}^3$ 空间中 Oxy 平面之外的点 (x,y,z) 处的电势 $V=\left(\frac{2y}{z}\right)^x$。求出在点 $(1,\frac{1}{2},1)$ 处电势 V 下降最快的方向上的单位向量。

多元泰勒公式与展开

将一元泰勒公式推广到二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近的展开：

二阶泰勒公式

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) \\
&+ \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + R_2
\end{aligned}
$$

应用：利用已知的一元泰勒展开（如 $e^t, \sin t$）进行代换，可以快速求出多元函数的近似多项式或高阶偏导数值。

多元泰勒公式示例

例：求二元函数的泰勒展开

- 求函数 $f(x,y)=e^x\sin y$ 在 $(0,0)$ 处的泰勒公式，展到二阶。
- 首先计算函数在点 $(0,0)$ 处的函数值及一阶、二阶偏导数：

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &== 0, \quad & f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 1 \\
f_{xx}(0,0) &= 0, \quad & f_{xy}(0,0) = 1, f_{yy}(0,0) = 0
\end{aligned}
$$

根据二元函数在 $(0,0)$ 处的二阶泰勒公式：

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& f(0,0) + [f_x(0,0)x + f_y(0,0)y] \\
& + \frac{1}{2!}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] + o(\rho^2) \\
f(x,y) &= y + xy + o(x^2+y^2)
\end{aligned}
$$

隐函数定理

核心结论

对于方程 $F(x, y, z) = 0$，若 $F_z \neq 0$，则存在隐函数 $z = z(x, y)$。
求导公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

推导思路：对方程两边同时关于 x 求偏导（将 z 看作 x 的函数），利用链式法则解出 $\partial z/\partial x$。

无条件极值

第一步：求驻点，即解方程组 $\nabla f = 0 \implies f_x = 0, f_y = 0$。
第二步：利用海森矩阵 (Hessian Matrix) 判定。令
$A = f_{xx}, B = f_{xy}, C = f_{yy}$，判别式 $\Delta = B^2 - AC$。

- $\Delta < 0$ 且 $A > 0 \implies$ 极小值
- $\Delta < 0$ 且 $A < 0 \implies$ 极大值
- $\Delta > 0 \implies$ 非极值（鞍点）
- $\Delta = 0 \implies$ 失效，需做进一步讨论

条件极值：拉格朗日乘数法

求目标函数 $f(x, y)$ 在约束 $\phi(x, y) = 0$ 下的极值。

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

2. 求驻点：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. 求解：解方程组得到候选点，比较函数值确定最值。

期末考题

例：隐函数与极值问题

- 证明：对于任意给定的 $k \in \mathbb{R}$，存在 0 的开邻域 U 和 W，存在唯一的函数 $y = f(x)$，$x \in U$，$y \in W$ 满足方程
$$e^{kx} + e^{ky} - 2e^{x+y} = 0.$$
- 求函数 $f(x) = (\sin x)^{\frac{2}{3}} + (\cos x)^{\frac{2}{3}}$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值，并指明所有最小值点。
- 设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, z) = z^3 + x^2 z - 2y^3 = 0$ 确定的隐函数。求 $z(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 处最大的方向导数。
- 求欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中原点 $O(0, 0, 0)$ 到曲面 $(x - y)^2 - z^2 = 4$ 上的点的最短距离。

期末考题

例：综合类型

- 证明：对于任意给定的 $k \in \mathbb{R}$，存在 0 的开邻域 U 和 W，存在唯一的函数 $y = f(x)$，$x \in U$，$y \in W$ 满足方程
$$e^{kx} + e^{ky} - 2e^{x+y} = 0.$$
- 求函数 $f(x) = (\sin x)^{\frac{2}{3}} + (\cos x)^{\frac{2}{3}}$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值，并指明所有最小值点。
- 设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, z) = z^3 + x^2 z - 2y^3 = 0$ 确定的隐函数。求 $z(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 处最大的方向导数。
- 求欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中原点 $O(0, 0, 0)$ 到曲面 $(x - y)^2 - z^2 = 4$ 上的点的最短距离。

总结与展望

- 一元拓展：泰勒公式是分析局部性质的桥梁。
- 多元基础：全微分是核心，需厘清它与偏导、连续的关系。
- 计算核心：熟练掌握链式法则和隐函数求导。
- 应用场景：利用梯度和 Hessian 矩阵解决优化问题。

祝大家考试顺利