线性代数期末知识点串讲

胡中山

北京大学经济学院

2025 年 12 月 29 日

1.1 矩阵乘法

矩阵乘法的理解

矩阵乘法是线性变换的复合。

- 行视角：AB 的行是 B 的行的线性组合（系数由 A 给出）。
- 列视角：AB 的列是 A 的列的线性组合（系数由 B 给出）。

核心性质：非交换性

矩阵乘法满足结合律和分配律，但一般情况下不可交换

- 交换不变量：迹 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
- 行列式乘法性：$|AB| = |A||B|$
- 与转置复合：$(AB)^T = B^T A^T$

1.2 特殊矩阵：矩阵乘法中的特例

- 单位矩阵 I：左乘和右乘都不改变变换的对象
- 对角矩阵 D：左乘则每行乘上对应行主元，右乘则每列乘上对应列主元
- 基本矩阵 E_{ij}：左（右）乘一个矩阵 A，就相当于把 A 的第 j 行搬到第 i 行的位置（把 A 的第 i 列搬到第 j 列的位置），而乘积矩阵的其余行（列）全为 0。
- 初等矩阵（初等变换都可以用初等矩阵的乘法来表示）：
  1. $P(j,i(k))$ 左（右）乘，相当于把第 i 行的 k 倍加到第 j 行上（把第 j 列的 k 倍加到第 i 列上），其余不变
  2. $P(i,j)$ 左（右）乘，相当于交换第 i 行和第 j 行（交换第 i 列和第 j 列）
  3. $P(i(c))$ 左（右）乘，相当于把第 i 行（列）乘以 c

1.3 矩阵的逆

对于一个矩阵 A，如果存在一个矩阵 B，使得 $AB = BA = I$，则称矩阵 A 可逆，矩阵 B 称为矩阵 A 的逆矩阵，记作 A^{-1}。

矩阵的逆的性质

- 矩阵 A 可逆等价于行列式不为 0，A 可逆时，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
  - 矩阵可逆等价于矩阵满秩
  - 矩阵可逆等价于行（列）向量组线性无关
- 矩阵可逆等价于它可以写成一系列初等矩阵的乘积
- 可逆矩阵左（右）乘不改变矩阵的秩
- 可逆矩阵的行简化阶梯形矩阵一定是单位矩阵，而且 $I^{-1} = I$

1.4 矩阵的秩相关计算

- 变换复合后，维度只减不增：

$$\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

- 对于矩阵和其转置的乘积，秩不变：

$$\operatorname{rank} A'A = \operatorname{rank} AA' = \operatorname{rank} A$$

- 给定数域 K 上的分块矩阵

$$N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

则有

$$r(A) + r(B) \leq r(N).$$

- 对于任意矩阵 $A_{s\times n}$，设 $W = \{x|Ax = 0\}$，则有

$$\operatorname{rank} A + \dim W = n$$

例题

- 设 $A \in M_{m,n}(K)$ 且 $r(A)=n$. 又设 B, C 为数域 K 上 $n \times s$ 矩阵，且 $AB = AC$. 证明 $B = C$.
- 设 M 为行列式不为零的 5 阶矩阵. 证明：存在一个可逆的的 5-阶上三角矩阵 B 使得矩阵 BM 满足：$\forall 1 \leq i \leq 5$, 存在且只存在一行，前 $i-1$ 个位置为零，第 i 个位置不为零.
- 设 A 是数域 K 上的 n 阶方阵。
  - 证明：若 $A^2 = I$，则
  $$r(A+I)+r(A-I)=n;$$
  - 证明：若 $A^2 = A$，则
  $$r(A)+r(A-I)=n.$$
  - 证明：n 为偶数，当且仅当存在实数域上的 n 阶方阵 A，使
  $$A^2+I=0.$$
- 设 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 $A \in M_n(C)$ 恰有 k 个 $n-1$ 阶子式等于 0，其中 $1 \leq k \leq n-1$。证明：$\det A \neq 0$。

2.1 相抵 vs 相似

相抵 (Equivalence)

$$B = PAQ$$

- 对象：形状相同的矩阵 A, B
- 含义：对线性方程组的变换(行变换 + 列变换)。
- 最简形：$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 唯一不变量：秩 (r)

相似 (Similarity)

$$B = P^{-1}AP$$

- 对象：同级方阵 A, B。
- 含义：同一个线性变换在不同基下的矩阵表示。
- 不变量：秩、特征值、迹、行列式。
- 相似是相抵的特例

2.2 对角化的核心理论

能不能对角化？

矩阵 A 相似于对角阵 $\Lambda \iff A$ 有 n 个线性无关的特征向量。

判别步骤：

1. 求特征多项式 $|\lambda I - A| = 0$，解出特征值 λ_i。
2. 对每个 λ_i，求特征子空间 V_{λ_i} 的维数 $n_i = n - \mathrm{rank}(\lambda_i I - A)$。
3. 核心判据：若 $\sum n_i = n$（即几何重数 = 代数重数），则可对角化。

施密特正交化

给定向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，通过施密特正交化可得到一组正交（或标准正交）向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$，且 $\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\} = \mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$。

例题

- 设 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 $r(r \neq 0)$. 证明：存在 $s \times r$ 列满秩矩阵 P_1 与 $r \times n$ 行满秩矩阵 Q_1, 使得 $A = P_1 Q_1$.
- 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求出 A^{2024}
- 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$, 已知-5 是 A 的重数为 2 的特征值。
  (1) 求 a 的值。
  (2) 求一个正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。
- 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = 2A$, 证明 A 可以对角化。
- 设 n 为正整数，A 为 n 阶半正定实对称矩阵. 求证：对任意的 n 维实列向量 α, β, 都有

$$(\alpha^T A\beta)^2 \leq (\alpha^T A\alpha)\left(\beta^T A\beta\right)$$

3.1 二次型

合同变换 (Congruence)

- 研究对象：实对称矩阵 A。
- 关系：$B = C^T AC$ (C 可逆)。
- 实对称矩阵合同于一个对角矩阵（正交相似于对角矩阵）。这个对角矩阵称之为二次型的合同标准形。
- 若合同标准形中只有 $1, -1, 0$，则称之为规范形。

惯性定律 **(Sylvester's Law)**：二次型的标准形中，正平方项个数 p 和负平方项个数 q 是唯一确定的。

- p: 正惯性指数；q: 负惯性指数。
- 秩 $r = p + q$。
- 合同矩阵：秩、正惯性指数、负惯性指数相等。

3.2 标准形与规范形

- 配方法：利用恒等变形，依次消去各个变量的交叉项，将二次型化为平方和的形式。设坐标变换为 $X = CY$，C 可逆，则 $C^{\top}AC = \Lambda$（对角阵），其中 Λ 即为标准形。
- 成对初等行列变换法：参见 P203
  - 构造：构造 $2n \times n$ 的分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$；
  - 变换：若对上方的 A 进行同类型的初等行变换，则需同时对该分块矩阵进行初等列变换
  - 结论：不断变换直至上方的 A 变为对角矩阵 Λ，此时下方的单位矩阵 I 变为 C。

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{成对变换}} \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$$

此时 $C^{\top}AC = \Lambda$ 成立。

3.3 正定性

设 A 为 n 阶实对称矩阵，二次型为 $f(X) = X^\top AX$，则以下命题等价：

- 定义：对任意非零向量 $\alpha \neq 0$，都有 $\alpha^\top A\alpha > 0$；
- 惯性指数：f 的正惯性指数 $p = n$；
- 标准形：f 的标准形中 n 个系数全大于 0；
- 合同关系：A 合同于单位矩阵 I（即 $A \simeq I$）；
- 特征值：A 的所有特征值 $\lambda_i > 0$；
- 顺序主子式：A 的所有顺序主子式全大于零（Sylvester 判据）。

$$\Delta_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

例题

- 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=x_1x_6+x_2x_5+x_3x_4$，做非退化线性替换使得其化为标准形。
- A 是正定矩阵，B 是实对称矩阵，求证存在可逆矩阵 C，使得 C^TAC 与 C^TBC 同时为对角矩阵。
- 考虑实二次型

$$Q(x,y,z)=\lambda(x^2+y^2+z^2)-2xy-2xz+2yz,$$

其中 λ 为参数，请回答下列问题并请证明你的结论：
(1) 当 $\lambda=1$ 时，$Q(x,y,z)$ 为何种二次型；
(2) 当且仅当 λ 取何值时，存在不全为零的实数 a,b,c 使得

$$Q(x,y,z)=(ax+by+cz)^2.$$

4.1 线性空间：从向量组到线性空间

- 定义与公理：从 $\mathbb{R}^n$ 的加法和数乘性质中提取 8 条公理（封闭性、结合律、分配律等）。一个集合 V 若定义了加法和数乘并满足这些公理，即为线性空间。
- 典型示例：$\mathbb{R}^n$、次数不超过 n 的多项式空间 $P_n(\mathbb{R})$、矩阵空间 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$、连续函数空间 $C[a,b]$。
- 与向量组对应的概念：线性表出、线性相关、秩、基、维数

子空间 (Subspace)

线性空间 V 的非空子集 W，若对任意 $u,v\in W$ 和标量 c，都有 $u+v\in W$ 和 $cu\in W$，则称 W 是 V 的子空间。

- 运算：子空间的交是子空间，子空间的和是子空间。
- 维数公式：
  $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$。

4.2 基：线性空间的骨架

- 基 (Basis)：线性无关且生成整个空间的向量组。空间中任意向量可唯一表示为基的线性组合。
- 维数 (Dimension)：基中向量的个数。
- 坐标：一旦选定一组基，抽象向量 v 就变成了具体的 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标向量。所有 n 维线性空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构。
- 过渡矩阵：连接两组不同基的矩阵。若基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 A，则

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A.$$

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基，且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$，则 A 可逆当且仅当 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 也是 V 的一组基。
2. 若 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X$，$\alpha = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)Y$，则 $Y = A^{-1}X$。

4.3 从矩阵乘法到线性映射

设 V 和 W 是数域 K 上的线性空间，映射 $T: V \to W$ 称为线性映射，如果对任意 $u, v \in V$ 和标量 $c \in K$，都有

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \quad T(cu) = cT(u).$$

维数定理：$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$。

线性映射的矩阵表示

- 定义：设 $\mathbf{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$V$ 基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$W$ 基为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$，$\mathbf{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)A$，则称 A 为 $\mathbf{A}$ 在所选基下的矩阵表示。
- 设 V 是数域 K 上 n 维线性空间，V 上的一个线性变换 A 在 V 的两个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 下的矩阵分别为 A, B。从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 的过渡矩阵是 S，则

$$B = S^{-1}AS.$$

例题

- $$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix}$$
  而 V 是所有与 A 可交换的 n 阶实方阵全体，证明
  (1) V 是线性空间；
  (2) V 的维数 $\dim V=n$。
- 设 $M_2(k)$ 是数域 k 上所有 2-级方阵构成的线性空间。
  (i). 证明：矩阵的转置是 $M_2(k)$ 上的线性变换。
  (ii). 求出转置线性变换在基本矩阵 E_{ij} 构成的基下的矩阵。
- 设 V_1, V_2 分别是齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间。证明 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 是 V_1, V_2 的直和。