线性代数（B）小班讲义

胡中山
zhongshanhu@stu.pku.edu.cn

2025 年 6 月 1 日

目录

1 线性方程组与高斯消元法

1.1 基础概念

1. 问题的开始：求解线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1. \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2. \\
\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

2. 求解的流程：

- 确定线性方程组是否有解
- 给出线性方程组的解

3. 求解的工具：高斯消元法（主要是初等行变换）

- 初等行变换:
  (a) 把一行的倍数加到另一行上
  (b) 互换两行的位置
  (c) 用一个非零数乘某一行
- 变换的目标：阶梯型矩阵（判断有解与否）、行简化阶梯型矩阵（判断解的性质）

4. 线性方程组与矩阵的关系：矩阵是对线性方程组的形式化表示

- 矩阵元素的范围：数域（现阶段只需要知道是复数的一个子集，对加减乘除封闭，含有 0，1，默认特征为 0）
- 对矩阵的操作：初等行变换
- 矩阵的简化也模糊了行和列的区别

5. 齐次线性方程组：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0.
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

一定有解的一类线性方程组：0 解称为平凡解，非 0 解称为非平凡解

6. 希望能达到的联想效果：

- 线性方程组 $\Leftrightarrow$ 矩阵、向量组 $\Leftrightarrow$ 几何多面体
- 线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ 向量组间可以线性表示 $\Leftrightarrow$ 多面体维度低于空间维度

1.2 习题练习

1. 设

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 = a_1, \quad x_2 - x_3 = a_2, \\
&x_3 - x_4 = a_3, \quad x_4 - x_5 = a_4, \\
&x_5 - x_1 = a_5.
\end{aligned}
$$

证明：这方程组有解的充分必要条件是 $\sum_i a_i = 0$. 在有解的情况下求其一般解。

2. 求 λ 的值, 使齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 0 \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 并求出其一般解.

3.

$$F = \left\{ \frac{a_0 + a_1\mathrm{e} + \cdots + a_n\mathrm{e}^n}{b_0 + b_1\mathrm{e} + \cdots + b_m\mathrm{e}^m} \middle| \begin{array}{c} n, m\text{为任意非负整数}, a_i, b_j \in \mathbf{Z}, \\ 0 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant m. \end{array} \right\}$$

证明 F 是一个数域，其中 e 是自然对数的底。

4. * 设 M 为行列式不为零的 5 -阶矩阵. 证明：存在一个行列式不为零的 5-阶上三角矩阵 B 使得矩阵 BM 有如下性质：对于 $\forall 1 \leq i \leq 5$, 都存在且只存在 BM 的一行，使得该行的前 $i-1$ 个位置为零，第 i 个位置不为零.

5. * 给定实数域上齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + \lambda x_2 + \cdots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1} + \lambda x_n = 0, \end{cases}$$

其中 $a_{ij} = -a_{ji}$(当 $i \neq j$ 时). 若已知上面齐次线性方程组在复数域内有非零解，证明 $\lambda = 0$.

6. * 给定数域 K 内 n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$。设 x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ 是 n^2 个未知量。求下列线性方程组的全部解：

$$a_i a_l x_{jk} - a_j a_k x_{il} = 0$$

其中 i, j, k, l 分别取 $1, 2, \ldots, n$。

1.3 习题答案

1. 解：写出方程组的增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{bmatrix}$$

对增广矩阵进行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum a_i \end{bmatrix}$$

当 $\sum a_i = 0$ 时，方程组有解. 接着行变换，得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_1+a_2+a_3+a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2+a_3+a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3+a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum a_i \end{bmatrix}$$

从而得到方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5 \\ x_4 = a_4 + x_5 \end{cases}$$

2. 解：对于齐次线性方程组有非零解，其系数行列式需为零：

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式并化简：

$$\begin{aligned} &(\lambda+3)[(\lambda-1)(\lambda+3)-\lambda] - 1[\lambda(\lambda+3)-3(\lambda+1)] + 2[\lambda^2 - 3(\lambda^2-1)] \\ &= (\lambda+3)(\lambda^2+\lambda-3) - (\lambda^2-3) + 2(-2\lambda^2+3) \\ &= \lambda^3 + 4\lambda^2 - 9 - \lambda^2 + 3 - 4\lambda^2 + 6 \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \implies \lambda(\lambda-1) = 0 \end{aligned}$$

解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$。

(a) 当 $\lambda = 0$ 时，方程组为：

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

由 $x_3 = x_2$，代入得 $x_1 = -x_2$。令 $x_2 = t$，通解为：

$$x = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) 当 $\lambda = 1$ 时，方程组为：

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

由 $x_1 = -x_3$，代入得 $x_2 = 2x_3$。令 $x_3 = t$，通解为：

$$x = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

综上，$\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时方程组有非零解，一般解分别为 $t(-1,1,1)^T$ 和 $t(-1,2,1)^T$（t 为任意实数）。

3. 证明：任取 $x, y \in F$，设

$$x = \frac{a_0 + a_1\mathrm{e} + \cdots + a_{n_1}\mathrm{e}^{n_1}}{b_0 + b_1\mathrm{e} + \cdots + b_{m_1}\mathrm{e}^{m_1}}, \quad y = \frac{c_0 + c_1\mathrm{e} + \cdots + c_{n_2}\mathrm{e}^{n_2}}{d_0 + d_1\mathrm{e} + \cdots + d_{m_2}\mathrm{e}^{m_2}}$$

$$x + y = \frac{a_0 + a_1\mathrm{e} + \cdots + a_{n_1}\mathrm{e}^{n_1}}{b_0 + b_1\mathrm{e} + \cdots + b_{m_1}\mathrm{e}^{m_1}} + \frac{c_0 + c_1\mathrm{e} + \cdots + c_{n_2}\mathrm{e}^{n_2}}{d_0 + d_1\mathrm{e} + \cdots + d_{m_2}\mathrm{e}^{m_2}}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(a_0+\cdots+a_{n_1}\mathrm{e}^{n_1})(d_0+\cdots+d_{m_2}\mathrm{e}^{m_2})+(c_0+\cdots+c_{n_2}\mathrm{e}^{n_2})(b_0+\cdots+b_{m_1}\mathrm{e}^{m_1})}{(b_0+\cdots+b_{m_1}\mathrm{e}^{m_1})(d_0+\cdots+d_{m_2}\mathrm{e}^{m_2})}\\
&=\frac{(a_0d_0+\cdots+a_{n_1}d_{m_2}\mathrm{e}^{n_1+m_2})+(c_0b_0+\cdots+c_{n_2}b_{m_1}\mathrm{e}^{n_2+m_1})}{b_0d_0+\cdots+b_{m_1}d_{m_2}\mathrm{e}^{m_1+m_2}}\\
&=\frac{(a_0d_0+c_0b_0)+(a_1d_0+c_1b_0)\mathrm{e}+\cdots+(a_{n_1}d_{m_2}+c_{n_2}b_{m_1})\mathrm{e}^{n_1+m_2}}{(b_0d_0+\cdots+b_{m_1}d_{m_2}\mathrm{e}^{m_1+m_2})}\\
x-y&=\frac{(a_0+\cdots+a_{n_1}\mathrm{e}^{n_1})(d_0+\cdots+d_{m_2}\mathrm{e}^{m_2})-(c_0+\cdots+c_{n_2}\mathrm{e}^{n_2})(b_0+\cdots+b_{m_1}\mathrm{e}^{m_1})}{(b_0+\cdots+b_{m_1}\mathrm{e}^{m_1})(d_0+\cdots+d_{m_2}\mathrm{e}^{m_2})}\\
&=\frac{(a_0d_0-c_0b_0)+(a_1d_0-c_1b_0)\mathrm{e}+\cdots+(a_{n_1}d_{m_2}-c_{n_2}b_{m_1})\mathrm{e}^{n_1+m_2}}{b_0d_0+\cdots+b_{m_1}d_{m_2}\mathrm{e}^{m_1+m_2}}\\
x\cdot y&=\frac{(a_0+\cdots+a_{n_1}\mathrm{e}^{n_1})(c_0+\cdots+c_{n_2}\mathrm{e}^{n_2})}{(b_0+\cdots+b_{m_1}\mathrm{e}^{m_1})(d_0+\cdots+d_{m_2}\mathrm{e}^{m_2})}\\
&=\frac{a_0c_0+\cdots+a_{n_1}c_{n_2}\mathrm{e}^{n_1+n_2}}{b_0d_0+\cdots+b_{m_1}d_{m_2}\mathrm{e}^{m_1+m_2}}\\
x/y&=\frac{(a_0+\cdots+a_{n_1}\mathrm{e}^{n_1})(d_0+\cdots+d_{m_2}\mathrm{e}^{m_2})}{(b_0+\cdots+b_{m_1}\mathrm{e}^{m_1})(c_0+\cdots+c_{n_2}\mathrm{e}^{n_2})}\\
&=\frac{a_0d_0+\cdots+a_{n_1}d_{m_2}\mathrm{e}^{n_1+m_2}}{b_0c_0+\cdots+b_{m_1}c_{n_2}\mathrm{e}^{m_1+n_2}}
\end{aligned}
$$

零元和逆元存在性显然. 所以 F 是一个数域.

4. 只需证明经过一系列初等行变换可以得到阶梯型矩阵。

5. 证明：不妨先考虑在实数域上的情况，即方程组在实数域上有非零解. 设方程组的解为 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，则有

$$
\begin{aligned}
\lambda x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0,\\
a_{21}x_1+\lambda x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0,\\
&\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+\lambda x_n&=0.
\end{aligned}
$$

此时，将方程组左式第 i 行乘以 x_i，然后相加，结合 $a_{ij}=-a_{ji}$，得到

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0.$$

由于方程组在实数域上有非零解，所以 $\lambda=0$. 接下来考虑方程组在复数域上的情况，即方程组在复数域上有非零解. 设方程组的解为 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，则有假设 $x_j=a_j+\mathbf{i}\,b_j$，其中 $a_j,b_j\in\mathbb{R}$，则得到两个方程组：

$$
\begin{aligned}
\lambda a_1+a_{12}a_2+\cdots+a_{1n}a_n-\lambda b_1-a_{12}b_2-\cdots-a_{1n}b_n&=0,\\
a_{21}a_1+\lambda a_2+\cdots+a_{2n}a_n-a_{21}b_1-\lambda b_2-\cdots-a_{2n}b_n&=0,\\
&\cdots\\
a_{n1}a_1+a_{n2}a_2+\cdots+\lambda a_n-a_{n1}b_1-a_{n2}b_2-\cdots-\lambda b_n&=0.
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\lambda b_1+a_{12}a_2+\cdots+a_{1n}a_n+\lambda a_1-a_{12}b_2-\cdots-a_{1n}b_n&=0,\\
a_{21}b_1+\lambda b_2+\cdots+a_{2n}a_n+a_{21}a_1-\lambda a_2-\cdots-a_{2n}b_n&=0,\\
&\cdots\\
a_{n1}b_1+a_{n2}b_2+\cdots+\lambda b_n+a_{n1}a_1-a_{n2}a_2-\cdots-\lambda a_n&=0.
\end{aligned}
$$

对两个方程组分别进行类似于实数域上的操作，得到

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0,$$
$$\lambda \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0.$$

由于方程组在复数域上有非零解，所以 $\lambda = 0$.

6. 解：若 $a_i \neq 0, \forall i$，任取 x_{il}，设 $x_{il} = ca_i a_l$，则有

$$\begin{aligned} a_i a_l x_{jk} - a_j a_k x_{il} &= a_i a_l x_{jk} - a_j a_k c a_i a_l \\ &= a_i a_l (x_{jk} - c a_j a_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

于是，$x_{jk} = ca_j a_k$，即 $x_{ij} = ca_i a_j$ 是方程组的唯一解.

若 $\exists i, a_i = 0$，不妨设 $a_1, a_2, \ldots, a_k = 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n \neq 0$，则有则 $a_i a_l x_{il} \equiv 0$，即只要 $i \leq k$ 或 $l \leq k$，则 x_{il} 可以取任意值，另一方面，若 $i > k$ 且 $l > k$，则 $x_{il} = 0$.

2 行列式计算与证明

2.1 基础概念

1. 行列式的含义与内容：

- 按照定义：行列式是 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积，把这 n 个元素按照行指标成自然序排好位置，当列指标所成排列是偶排列时，该项带正号；奇排列时，该项带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

  其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 元排列，$\sum_{h_1, h_2}$ 表示对所有 n 元排列求和.(5) 式称为 n 阶行列式的完全展开式。
- 实质是将从矩阵空间到实数空间的一种映射。det 函数，可以看成是将矩阵映射为其对应的高维有向平行多面体的体积。

2. 行列式的展开：

- 按一行(列)展开：即把行列式按某一行(列)展开成元素与其对应代数余子式乘积的和，即 $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。
  (a) 一行的元素与其对应的代数余子式的乘积之和为行列式的值，即 $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$。
  (b) 一行的元素与另一行元素的代数余子式的乘积之和为 0，即 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0, \forall k \neq j$。
- 按 k 行（列）展开（Laplace 展开）：即把行列式按 k 行（列）展开成行列式的和。

3. 行列式的性质：

- 行列互换，值不变
- 可以对行提取公因子
- 可以根据一行拆成两个行列式的和
- 两行互换行列式变号

- 两行成比例（相等）行列式为零

4. 计算方法：

- **降阶法**：即把高阶行列式转化为低阶行列式的计算。通常总是先结合行列式的性质，把行列式的某行（列）或几行（列）的元素变换成尽可能多的零，然后再展开。
- **升阶法**：将 n 阶行列式增加一行一列变成 $n+1$ 阶行列式，使之更易于计算。
- **递推法**：将 n 阶行列式 D_n 用与其形状完全相同的较低阶行列式 D_{n-1} 与 D_{n-2} 来表示，经过递推求得 D_n。在利用数学归纳法时往往与递推法结合使用。
- **拆项法**：将一个 n 阶行列式拆成 2^n 个 n 阶行列式的和，其中大部分为零。
- **利用 Vandermonde 行列式**:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

2.2 习题练习

1. 证明下面的行列式不为零:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2010 & 2011 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 2011^2 & 2012^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 2012^3 & 2012^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2010^{2010} & 2011^{2010} & 2012^{2010} & \cdots & 2012^{2010} & 2012^{2010} \\ 2011^{2011} & 2012^{2011} & 2012^{2011} & \cdots & 2012^{2011} & 2012^{2011} \end{vmatrix}$$

2. 设

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

是 n 阶方阵且 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$. 求 A_n 的行列式 $|A_n|$.

3. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

4. 设 $a, b, p_1, p_2, \cdots, p_n \in \mathbb{R}, a \neq b$. 求行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} p_1 & a & a & \cdots & a \\ b & p_2 & a & \cdots & a \\ b & b & p_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & p_n \end{vmatrix}.$$

5. 计算由余弦函数构成的 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos 2\varphi_n & \cdots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}$$

6. 已知：

$$\begin{vmatrix} x & y & z & x+y+z \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

求：

$$\begin{vmatrix} x-y & y & z-x & x+y+z \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ y-x & 2-y & x-z & 2-x-y-z \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

7. * 设 n 为大于 1 的正整数，试计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix},$$

其中 a_j, b_j 属于任意的数域。

8. * 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为实数域上的矩阵，证明：

(1) 如果 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$, 那么 $\det A \neq 0$;

(2) 如果 $a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$, 那么 $\det A > 0$.

9. * 设 $n \geq 3$，$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 是关于 x 的次数不超过 $n-2$ 的多项式，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为任意数。证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$$

并举例说明条件“次数不超过 $n-2$”是不可缺少的。

2.3 习题答案

1. 解：行列式每一项对应的排列中，只有副对角线上的元素乘积不为 2012 的倍数，因此行列式不为零.

2. 有多种典型的方法，这里只写一种：

   解：对 A_n 的第 i 行减去第 1 行，得到：

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_1}{a_i}) \times \prod_{i=2}^{n} a_i$$

3. 解：对 D_n 的最后一行展开，得到：

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

   由此可以得到 $D_n - aD_{n-1} = b^n$, 从而解出

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

4. 把 D 记为 D_n，按第 n 列拆项，得

$$D_n = \begin{vmatrix} p_1 & a & a & \cdots & a \\ b & p_2 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} + (p_n - a)D_{n-1}$$

$$= a(p_1-b)(p_2-b)\cdots(p_{n-1}-b) + (p_n-a)D_{n-1}$$

   再把 D_n 按第 n 行拆项（或根据对称性），可得

$$D_n = b(p_1-a)(p_2-a)\cdots(p_{n-1}-a) + (p_n-b)D_{n-1}$$

   联立上述二式，消去 D_{n-1}，即得

$$D_n = \frac{af(b) - bf(a)}{a-b}$$

   这里

$$f(t) = (p_1-t)(p_2-t)\cdots(p_n-t)$$

5. 解：先计算 D_4 再推广到 D_n。利用三角函数的倍角公式，得

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & 2\cos^2\varphi_1 - 1 & 4\cos^3\varphi_1 - 3\cos\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & 2\cos^2\varphi_2 - 1 & 4\cos^3\varphi_2 - 3\cos\varphi_2 \\ 1 & \cos\varphi_3 & 2\cos^2\varphi_3 - 1 & 4\cos^3\varphi_3 - 3\cos\varphi_3 \\ 1 & \cos\varphi_4 & 2\cos^2\varphi_4 - 1 & 4\cos^3\varphi_4 - 3\cos\varphi_4 \end{vmatrix}$$

显然，上述行列式可化为 Vandermonde 行列式。所以

$$D_4 = 8\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \cos^3\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_2 & \cos^3\varphi_2 \\ 1 & \cos\varphi_3 & \cos^2\varphi_3 & \cos^3\varphi_3 \\ 1 & \cos\varphi_4 & \cos^2\varphi_4 & \cos^3\varphi_4 \end{vmatrix} = 8\prod_{1\le j<i\le 4}(\cos\varphi_i - \cos\varphi_j)$$

推广到 n 阶情形。根据上述计算易知，对于 $k \ge 3$，有

$$\cos k\theta = 2^{k-1}\cos^k\theta + P_{k-2}(\cos\theta)$$

其中 $P_{k-2}(\cos\theta)$ 是关于 $\cos\theta$ 的 $k-2$ 次多项式（可用数学归纳法证明）。因此，有

$$\begin{aligned} D_n &= 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix} \\ &= 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}(\cos\varphi_i - \cos\varphi_j) \end{aligned}$$

6. 解：对原行列式依次进行如下变换：第三列减去第一列，第一列减去第二列，第四行加上第二行，第三行乘 2，第三行减去第一行，可以得到结果为 1.

7. 解：将第 1 行至 $n-1$ 行都减去第 n 行，并提出各行的公因子，再提出各列的公因子，得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n + b_j)}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

将第 1 列至 $n-1$ 列都减去第 n 列，并提出各行的公因子，再提出各列的公因子，得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n + b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

将最后一个行列式按第 n 行展开，得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n + b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)}D_{n-1}$$

通过计算 D_2 并利用上述递推式，最终得到：

$$D_n = \frac{\prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j)}$$

8. (1) 用反证法. 假设 $\det A = 0$，则齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

必有非零解 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$. 设 $|c_k| = \max\{|c_1|, |c_2|, \cdots, |c_n|\}$，则 $|c_k| \neq 0$. 将 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 代入原方程组，其中第 k 个等式为

$$a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \cdots + a_{kk}c_k + \cdots + a_{kn}c_n = 0,$$

即

$$a_{kk}c_k = -a_{k1}c_1 - \cdots - a_{k,k-1}c_{k-1} - a_{k,k+1}c_{k+1} - \cdots - a_{kn}c_n,$$

所以

$$|a_{kk}| \leqslant \sum_{j\neq k} |a_{kj}| \left|\frac{c_j}{c_k}\right| \leqslant \sum_{j\neq k} |a_{kj}|.$$

此与题设不等式矛盾. 因此 $\det A \neq 0$.

(2) 将矩阵 A 的元素（对角线除外）都乘 t，构造如下行列式：

$$f(t) = \begin{vmatrix} a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1,n-1} & ta_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2,n-1} & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ta_{n-1,1} & ta_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & ta_{n-1,n} \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & ta_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对任意 $t \in [0, 1]$，显然有

$$a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \geqslant \sum_{j\neq i} |ta_{ij}|,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

所以，$f(t) \neq 0$（参见第 (1) 题的结论）.

此外，$f(t)$ 展开后是 t 的一个连续实函数，且 $f(0) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} > 0$ 及 $f(1) = \det A$. 若 $f(1) = \det A < 0$，则由连续函数的介值定理知，必存在 $t_0 \in (0, 1)$，使得 $f(t_0) = 0$，此与上面结论矛盾. 因此，$f(1) = \det A > 0$.

9. (1)分两种情形证明。当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有两个数相同时，则行列式有两行相同，因而等于 0；当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同，令

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

由于 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 的次数 $\leq n-2$，因此多项式 $F(x)$ 的次数 $\leq n-2$。但 $F(x)$ 显然有 $n-1$ 个互不相同的根：$a_2, a_3, \cdots, a_n$，所以 $F(x) \equiv 0$，从而 $F(a_1) = 0$。

(2) 若 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 不满足条件“次数 $\leq n-2$”，则所述行列式不一定为 0。例如：设 $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, \cdots, f_n(x) = x^{n-1}$，则对于互不相等的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n} (a_i - a_j) \neq 0$$

注：由此我们可以很轻松地解决此类行列式的求解

$$D = \begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & 4^{50} & \cdots & 101^{50} \\ 3^{50} & 4^{50} & 5^{50} & \cdots & 102^{50} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & 102^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}$$

3 向量组的线性相关性

3.1 基础概念

1. 向量空间：满足加法和数量乘法运算和基本运算法则的 n 元有序数组的集合
2. 线性相关的各级概念
   - 线性表出：β 可由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 线性表出，即某一向量可以用 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 中的部分向量通过加法和数量乘法得出（表示为它们的线性组合）
   - 线性相关：向量组中存在某一个向量可以用其余向量线性表出（所谓“共面”，相对“体”而言，其实就是向量组的维数小于向量组的个数，毕竟我们不会讨论两个向量是否共面）
   - 等价：两个向量组之间可以互相线性表出，实际上是定义了一个 ” = ” 关系
3. 线性相关的定义：向量组 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 k_i 使得 $\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i = 0$
   - 与线性相关有关的概念都建立在定义之上，当我们想不到结论时，可以尝试从定义出发
   - 通常证明线性相关（无关）的一个基本思路就是假设其反面，然后推出矛盾
4. 向量组的筛选观：
   - 直观上来说，向量组中的每一个向量并不具有特别之处，但是一次性思考这么多个向量对于普通的人类来说实际上并不容易。因此，如果我们承认我们的普通，我们可以利用其下标的次序，一步步筛出有用的部分。
   - 每次添加一个线性向量，考虑它是否是有效的（无法被现有的向量线性表出）
   - 这样，对于每次操作进行一般的讨论，我们就其中有用的部分可以给出向量组整体的性质。
5. 极大线性无关组：搭建向量空间的工具，可以是讨论的起点，保证了我们讨论的对象统统都是有效的
6. 秩 (rank)：极大线性无关组所包含向量的个数
   - 同一向量组的极大线性无关组向量个数相等
   - 有限数量向量组之间的一个序关系，可以理解为维数
7. 向量组的秩与线性相关
   - 向量组 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ 可以由向量组 $\{\beta_i\}_{i=1}^s$ 线性表出，则 $\text{rank}\{\alpha_i\}_{i=1}^r \le \text{rank}\{\beta_i\}_{i=1}^s$
   - 等价的向量组有相等的秩
   - $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 K^n 内一个向量组。则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 任一个 n 维向量都可被它们线性表示.
   - 若 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的秩为 r, 而 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是其中 r 个向量，使每个 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都能被它们线性表示，则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_r}$ 是 α_1, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的一个极大线性无关部分组.

3.2 习题练习

1. 已知向量组

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   与向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

   具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，求 a 和 b 的值。

2. 证明：如果一个向量组有一个部分组线性相关，那么该向量组也线性相关.

3. 证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性等价.

4. 证明：一个向量组的任一线性无关部分组都可扩充成它的一个极大线性无关部分组.

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，并且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表示。证明：必存在某个向量 β_j（其中 $j=1,2,\ldots,t$），使得向量组 $\beta_j,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关。

6. 设 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r)$ 是 $n\times r$ 矩阵,$B=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$ 是 $n\times s$ 矩阵,$\operatorname{rank}A=r,\operatorname{rank}B=s$. 证明: 若 $r+s>n$，则必存在非零向量 ξ，使得 ξ 既可由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 线性表示，又可由 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示.

7. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的秩为 r, 在其中任意 m 个向量:$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 证明:
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{bmatrix}\geq m+r-n$$

8. * 设 K^m 内向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n(n\geqslant 2)$ 的一个极大线性无关部分组是 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$. 又设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 且
$$\alpha=k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r}.$$
如果 $k_1+k_2+\cdots+k_r\neq 1$, 试求向量组
$$\alpha-\alpha_1,\alpha-\alpha_2,\cdots,\alpha-\alpha_n$$
的一个极大线性无关部分组。

3.3 习题答案

1. 解：显然 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 秩为 2. 由于向量组 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 与 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 具有相同的秩，故 β_1,β_2,β_3 线性相关。因此行列式
$$\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=0$$
又 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，从而可由 α_1,α_2 线性表出。于是有：
$$\begin{cases} a=3b \\ |\alpha_1,\alpha_2,\beta_3|=0\end{cases}$$
解得：
$$a=15,\quad b=5$$

2. 证明：由定义可证

3. 证明：由定义可证

4. 证明：逐步筛选可得

5. 证明：取 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的一个极大无关组 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 可由 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$ 线性表示。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，所以 $s\leq r$，且 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

   假设对任意 $\beta_{j_i}(i=1,2,\cdots,r)$，向量组 $\beta_{j_i},\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 β_{j_i} 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示。因此这两个向量组等价，从而
$$\operatorname{rank}(\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r})=\operatorname{rank}(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s),$$
   于是有 $r=s-1$，矛盾。故存在某个 $\beta_{j_i}(i=1,2,\cdots,r)$ 使得向量组 $\beta_{j_i},\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

6. 证明：分别取极大线性无关不分组，合并可得一线性相关组，由定义可证

7. 证明: 取 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的一个极大线性无关部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$，扩充为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$ 的一个极大线性无关部分组。

8. 注意到 $\alpha - \alpha_1, \alpha - \alpha_2, \cdots, \alpha - \alpha_n$ 都可以被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示，故

$$\text{rank}\{\alpha - \alpha_1, \alpha - \alpha_2, \cdots, \alpha - \alpha_n \leq r\}$$

下面证明 $\text{rank}\{\alpha - \alpha_1, \alpha - \alpha_2, \cdots, \alpha - \alpha_n\} \geq r$. 应该取 $\alpha - \alpha_{i_1}, \alpha - \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha - \alpha_{i_r}$ 证明其线性相关性，即证明存在不全为零的数 k_i 使得

$$\sum_{j=1}^{r} l_j(\alpha - \alpha_{i_j}) = 0$$

即

$$(\sum_{j=1}^{r} l_j)\alpha - \sum_{j=1}^{r} l_j \alpha_{i_j} = 0$$

由于 $\alpha = k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \cdots + k_r\alpha_{i_r}$，所以

$$\sum_{j=1}^{r}((\sum_{j=1}^{r} l_j)k_i - l_j)\alpha_{i_j} = 0$$

由于 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关，所以

$$(\sum_{j=1}^{r} l_j)k_i - l_j = 0, \forall i$$

将这 r 个方程相加，得到

$$\sum_{j=1}^{r}(\sum_{j=1}^{r} l_j)k_i = \sum_{j=1}^{r} l_j$$

由于 $k_1 + k_2 + \cdots + k_r \neq 1$，所以 $\sum_{j=1}^{r} l_j = 0$ 于是 $l_j = 0$。所以 $\alpha - \alpha_1, \alpha - \alpha_2, \cdots, \alpha - \alpha_n$ 线性无关，是一个极大线性无关部分组。

4 矩阵的秩

4.1 基础概念

1. 行秩与列秩
   - 行秩等于列秩，统称为矩阵的秩
   - 向量组的延伸组秩不减少，向量组的缩短组秩不增加。
2. 秩与初等变换
   - 初等行变换不改变列向量的线性相关性
   - 初等行（列）变换不改变矩阵的秩
   - 利用初等变换将矩阵化为行阶梯型矩阵，行阶梯型矩阵的秩等于非零行的个数
3. 秩与行列式
   - 非零矩阵的秩等于最大非零子式的阶数
     (a) 存在一个 r 阶子式不等于零，则 $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq r$
     (b) 所有 r 阶子式全为零，则 $\text{rank}(\mathbf{A}) < r$
   - 对于方阵，行列式不为零 $\Leftrightarrow$ 矩阵满秩
4. 秩的不等式

(a) 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，且 $AB = 0$，则

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$$

(b) 对于 $m \times n$ 矩阵 A 与 B，有

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

(c) 对于 $m \times n$ 矩阵 A 与 $m \times s$ 矩阵 B，有

$$\operatorname{rank}(A, B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

(d) 对于 $m \times n$ 矩阵 A 与 $s \times t$ 矩阵 B，有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

(e) 对于 $m \times n$ 矩阵 A 与 $s \times t$ 矩阵 B，有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

(f) 对于 $m \times n$ 矩阵 A 与 $s \times t$ 矩阵 B，有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

(g) 对于 $m \times n$ 矩阵 A 与 $n \times s$ 矩阵 B，有

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

4.2 习题练习

1. 求下列矩阵的秩

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

2. 给定数域 K 上 $m \times n$ 矩阵 $A, m \times s$ 矩阵 B, 把它们并排放在一起得 $m \times (n+s)$ 矩阵 $C = (A, B)$. 证明

$$\max[\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)] \leqslant \mathrm{r}(C) \leqslant \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$

3. 给定数域 K 上两个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

令

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

证明: $\mathrm{r}(C) \leqslant \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.

4. 设是数域 K 上一个 $m\times n$ 矩阵, 从中任取 s 行, 得一 $s\times n$ 矩阵 B. 证明:

$$\mathrm{r}(B)\geqslant \mathrm{r}(A)+s-m.$$

5. 设 A 是数域 K 上一个 $m\times n$ 矩阵, 且 $\mathrm{r}(A)=0$ 或 1. 证明存在 K 内的数 $a_1,a_2,\cdots,a_m;b_1,b_2,\cdots,b_n$, 使

$$A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & a_mb_n\end{bmatrix}.$$

6. 设 A, B 为 n 阶复方阵, s 为实数, $C=A+sB$. 试证明: 若 B 为满秩矩阵, 则必存在正实数 a, 使得当 $0<s<a$ 时, C 为满秩矩阵

7. * 设 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足条件

   (1) $a_{ii}>0$ ($i=1\ ,2\ ,\cdots,n$) ;

   (2) $a_{ij}<0$ $(i\neq j,i,j=1\ ,2\ ,\cdots,n)$;

   (3) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=0$ $(j=1\ ,2\ ,\cdots,n)$.

   试求 A 的秩。

8. * 设 $n>2$, 且 $x_1,x_2,\dots,x_n\neq 0$, 矩阵 A 定义为:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & x_1+x_2 & x_1+x_3 & \cdots & x_1+x_n\\ x_2+x_1 & 0 & x_2+x_3 & \cdots & x_2+x_n\\ x_3+x_1 & x_3+x_2 & 0 & \cdots & x_3+x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n+x_1 & x_n+x_2 & x_n+x_3 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

   证明: $\operatorname{rank} A\geq n-1$

4.3 习题答案

1. 解: 显然, 该矩阵秩大于等于 2, 因为第一行与第四行线性无关, 只需考虑该矩阵秩是否等于 3. 分别取第 1,2,4 行和第 1,3,4 行的行列式, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 10 & 1\end{vmatrix}=3\lambda-9,\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2\\ 1 & 10 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=29-4\lambda$$

   从而得到该矩阵总有不为零的 3 阶子式, 故秩为 3.

2. 证明:取 A,B 的列向量组,分别记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,则 C 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$. 显然 $\{\alpha_i\}_i^n$ 和 $\{\beta_i\}_i^s$ 都可以被 $\{\alpha_i\}_i^n,\{\beta_i\}_i^s$ 线性表示,故 $\operatorname{rank}C\geq\max\{\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B\}$. 又可以取 $\{\alpha_i\}_i^n$ 和 $\{\beta_i\}_i^s$ 的极大线性无关部分组 $\{\alpha_{i_j}\}_j^{r_1}$ 和 $\{\beta_{i_j}\}_j^{r_2}$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可以被 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_{r_2}}$ 线性表示, 故 $\operatorname{rank}C\leq\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$.

3. 证明:取 A,B 的列向量组,分别记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,则 C 的列向量组为 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$. 显然 $\{\alpha_i+\beta_i\}_i^n$ 都可以被 $\{\alpha_i\}_i^n,\{\beta_i\}_i^n$ 线性表示, 故 $\operatorname{rank}C\leq\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$.

4. 证明:取 A 的行向量组,记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,则 B 的行向量组为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}$,其余行向量记作 $\alpha_{i_{s+1}},\alpha_{i_{s+2}},\cdots,\alpha_{i_m}$, 合并成矩阵记为 C.

   由第二问结论可知, $\operatorname{rank}A\leq\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}C\leq\operatorname{rank}B+m-s$, 即 $\operatorname{rank}B\geq\operatorname{rank}A+s-m$.

5. 证明：取 A 的列向量组，记为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，则对于任意两个非零向量 α_i, α_j，必有 $\alpha_i = k\alpha_j$，否则 α_i, α_j 线性无关，矩阵的秩大于 2。故得证。

6. 证明：取 C 的行列式 $|C| = |A + sB|$，要证明 C 为满秩矩阵，只需证明 $|C| \neq 0$ 即可。又因为 $|A + sB|$ 是关于 s 的至多 n 次多项式，故存在 $|A + sB| = 0$ 至多存在 n 个实数解，取 $0 < s < a$ 使得 $|A + sB| \neq 0$，即 C 为满秩矩阵。

7. 显然，$\operatorname{rank} A \leq n$，此时取其 $n-1$ 阶子式 $A(2, \cdots, n; 2, 3, \cdots, n)$. 显然这是一个主对角占优矩阵，行列式大于零，故 $\operatorname{rank} A = n-1$，得证。

8. 证明：只需证明 A 有一个不为零的 $n-1$ 阶子式即可。但是 A 形式较为对称，我们采取加边法来对该矩阵进行变换，即利用
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A + 1$$
从而只需证明 A_1 有一个不为零的 n 阶子式即可。对 A_1 进行初等变换：
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 & \cdots & x_1 + x_n \\ 0 & x_2 + x_1 & 0 & \cdots & x_2 + x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n + x_1 & x_n + x_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & x_1 + x_2 & \cdots & x_1 + x_n \\ x_2 & x_2 + x_1 & 0 & \cdots & x_2 + x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n + x_1 & x_n + x_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ x_1 & -x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_1 & -x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_1 & x_2 & \cdots & -x_n \end{pmatrix}$$
此时，该矩阵的 n 阶子式 $A(2, 3, \cdots, n; 2, 3, \cdots, n)$ 不为零，故 $\operatorname{rank} A_1 \geq n$，得证。

5 解线性方程组和基

5.1 基础概念

1. 行列式（Cramer 法则）：

   - 系数矩阵 A 行列式不为零 $\Leftrightarrow$ 方程有唯一解; 行列式为零，则有无穷多解或者无解
   - 齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵 A 行列式等于零
   - 系数矩阵行列式为零时，其方程的解为
   $$\left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}, ..., \frac{|B_n|}{|A|} \right)$$
   - 遗憾之处在于它只能处理方程个数和未知量个数相等的方程组，否则无法计算行列式

2. 秩：判别定理

   - 判别定理：线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵的秩和增广矩阵的秩相等（由于增广矩阵的秩不小于系数矩阵，所以只需要证明系数矩阵的秩大于等于增广矩阵即可）；方程组有解时，若系数的秩等于未知量个数则解唯一，否则有无穷多解
   - 解的性质：我们从最简单的齐次方程组讲起，注意到齐次方程组的解具有线性性；因此我们定义子空间这样一个东西，它对于向量的线性运算封闭；非齐次线性方程组的解等于一个特解加上导出组的解；

- 有了这些定理之后，线性方程组可以作为我们的工具而非我们的问题。通常，建立起两个不同线性方程组之间关联的办法是求其公共解。

3. 从基础解系到基：

- 基础解系：线性无关且可以表出所有解向量的向量组称为基础解系；
  (a) 先确定基础解系所包含的解的个数为 $n-r(A)$，也就是求出矩阵的秩
  (b) 然后再找出对应个数解向量，使得他们线性无关
- 基：线性无关且可以表示子空间中所有的向量的一组向量组；
- 维数：对于一个子空间，可能有很多组基，但是基的个数是相等的，我们定义为子空间的维数；解空间 W 的维数满足

$$\dim W = n - r(A)$$

  行空间和列空间的维数，竟然一样！
- 一个根本思路：复杂问题简单化，用尽可能简单的形式表达出所有的情况，事实上除了向量我们可以找基，数域也可以找基，函数也可以找基（一个典型的例子是 n 次多项式），只要我们能保证其中某些量转换前后不发生改变。

5.2 习题练习

1. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式，对任意整数 n 有 $f(n)$ 是整数. 证明 $f(x)$ 的系数都是有理数，同时举例说明存在不是整系数的多项式满足对任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数。

2. 设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式等于零，并且 A 的 (k,l) 元的代数余子式 $A_{kl}\neq 0$. 证明：

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{bmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系.

3. 设给定数域 K^n 内 $s+1$ 个向量

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad (i=1,2,\ldots,s),$$

$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

证明：如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解全是方程

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$$

的解，那么 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示。

4. 设四元齐次线性方程组 (I) 为:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

又已知某次线性方程组 (II) 的通解为:

$$k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1).$$

(a) 求线性方程组 (I) 的基础解系.

(b) 判断线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解; 若没有, 则说明理由

5. 设 A, B 为 n 阶阵，且 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B < n$，证明齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解。

6. * 用 $\mathbb{R}$ 表示实数域，定义 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f 如下：

$$f(X) = |x_1| + \cdots + |x_r| - |x_{r+1}| - \cdots - |x_{r+s}|, \forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $r \geq s \geq 0$. 证明：

(a) 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $n-r$ 维子空间 W，使得 $f(X) = 0, \forall X \in W$；

(b) 若 W_1, W_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个 $n-r$ 维子空间，且满足 $f(X) = 0, \forall X \in W_1 \cup W_2$，则一定有 $\dim(W_1 \cap W_2) \geq n - (r+s)$.

7. * 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实方阵，且 $|a_{ii}a_{jj}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$ 对任意 $i, j (i \neq j)$ 成立，证明：$\det(A) \neq 0$。

5.3 习题答案

1. 证明: 假设 $f(x)$ 是一元 n 次多项式, $n \in \mathbb{Z}$, 即 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 其中 $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. 任取 $n+1$ 个不同的整数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$，则有

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

由 Cramer 法则，显然方程的解均为有理数，得证。举例: $f(x) = \frac{1}{2}(x + x^2)$

2. 证明：由 A 的 (k,l) 元的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$ 且 $|A| = 0$ 可知，A 的秩为 $n-1$，故基础解系包含解向量的个数是 $n - r(A) = 1$. 又根据代数余子式的性质可知 $\sum_{i=1}^n A_{ki} a_{ji} = \delta_{jk}|A| = 0$，于是 η_1 是该齐次线性方程组的一个基础解系.

3. 证明：设线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间为 W_1, $\beta x = 0$ 的解空间为 W_2，由题意可知 $W_1 \cap W_2 = W_1$. 考虑方程组

$$\begin{cases} Ax = 0 \\ \beta x = 0 \end{cases},$$

次方程的解空间为 $W_1 \cap W_2$，由 $W_1 \cap W_2 = W_1$ 可知 $W_1 \cap W_2 = W_1$，即 W_1 是该方程组的解空间. 于是 $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ \beta \end{pmatrix} = n - \dim W_1 = n - (n - r(A)) = r(A)$，故 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示.

4. (a) 显然为 $\{l_1\eta_1 + l_2\eta_2\}$，其中 $\eta_1 = (1, 0, -1, 0), \eta_2 = (0, 1, 0, 1)$.

(b) 有公共解即 $\exists\alpha = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 = k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1)$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

有解。

5. 只需证明 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 有非零解即可。显然，其解空间的维数满足 $\dim W = n - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \geq n - (\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B) > 0$，即方程有解，得证.

6. (a)

   (b)

7.

6 矩阵乘法

6.1 基础概念

1. 矩阵乘法：其实是是递归的定义
   - n 行东西 $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$ 乘上 m 列东西 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m \end{pmatrix}$，得到 $m \times n$ 东西 $\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_m \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_m \\ & \cdots & & \\ A_nB_1 & A_nB_2 & \cdots & A_nB_m \end{pmatrix}$
2. 矩阵乘法的实质：变换
   - 矩阵乘向量，是将一个向量从一个空间变换到另一空间；矩阵乘矩阵，其实是变换的复合。
   - 变换满足结合律和分配律，但不满足交换律：变换的复合和分开逐次操作没有区别，但是变换不允许交换顺序。
3. 矩阵乘法相关的等式、不等式：
   - 核空间和像空间维数和为未定元个数：对于任意矩阵 $A_{s\times n}$，

     $$\operatorname{rank} A + \dim W = n$$

     其中 W 为 $AX = 0$ 的解空间
   - 变换复合后，维度只减不增：

     $$\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

   -

     $$\operatorname{rank} A'A = \operatorname{rank} AA' = \operatorname{rank} A$$

   - 给定数域 K 上的分块矩阵

     $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

     则有

     $$r(A) + r(B) \leq r(N).$$

4. 分块对角矩阵：

- 对两个同类型的 n 阶准对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix}$$

（其中 $A_i,B_i(i=1,2,\cdots,s)$ 同为 n_i 阶方阵），有

$$AB=\begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{bmatrix};$$

- $r(A)=r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_s)$;
- A 可逆 $\Leftrightarrow A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

5. 特殊矩阵的乘法：

- 单位矩阵 I：左乘和右乘都不改变变换的对象
- 对角矩阵：左乘则每行乘上对应行主元，右乘则每列乘上对应列主元
- 基本矩阵 E_{ij}：左（右）乘一个矩阵 A，就相当于把 A 的第 j 行搬到第 i 行的位置（把 A 的第 i 列搬到第 j 列的位置），而乘积矩阵的其余行（列）全为 0。
- 初等矩阵：
  (a) $P(j,i(k))$ 左（右）乘，相当于把第 i 行的 k 倍加到第 j 行上（把第 j 列的 k 倍加到第 i 列上），其余不变
  (b) $P(i,j)$
  (c) $P(i(c))$

6. 矩阵乘法与行列式

- |AB| = |A| |B|
- Binet-Cauchy 公式

6.2 习题练习

1. 设 $A\in M_{m,n}(K)$ 且 $r(A)=n$. 又设 B,C 为数域 K 上 $n\times s$ 矩阵, 且 $AB=AC$. 证明 $B=C$.

2. $A,B\in M_{2023,2023}(\mathbb{R})$，$AB=0$，求 $|BA+B'A+BA'|$

3. 设 A，B 是数域 K 上两个 $n\times n$ 矩阵且 $AB=BA$。又设 C 是将 A，B 的行向量依次排列所得的 $2n\times n$ 矩阵，即 $C=\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$。证明 $r(A)+r(B)\geq r(C)+r(AB)$。

4. 设 A 是数域 K 上的 $m \times n$ 矩阵，B 是 K 上的 $n \times k$ 矩阵，C 是 K 上的 $k \times s$ 矩阵，则

$$r(AB) + r(BC) \leq r(ABC) + r(B).$$

5. 给定数域 K 上 n 维向量空间 K^n 内一个线性无关向量组 $Y_0, Y_1, \ldots, Y_s$。证明存在 K 上一个非齐次线性方程组满足如下条件：

（1）$Y_0, Y_1, \ldots, Y_s$ 均为此非齐次线性方程组的解向量；

（2）该方程组的任意解向量 Y 均能被 $Y_0, Y_1, \ldots, Y_s$ 线性表示。

6. 设给定数域 K 上的对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i \neq \lambda_j$（$i \neq j$）。证明：与 A 可交换的数域 K 上的 n 阶方阵都是对角矩阵。

7. 证明：如果数域 K 上的 n 阶方阵 A 与数域 K 上的所有 n 阶方阵都可交换，则 A 必是一个数量矩阵：$A = \lambda I$。

8. 设 A 是数域 K 上的 n 阶方阵。证明：

(1) 若 $A^2 = E$，则

$$r(A+E) + r(A-E) = n;$$

(2) 若 $A^2 = A$，则

$$r(A) + r(A-E) = n.$$

9. 设 n 为偶数。证明存在实数域上的 n 阶方阵 A，使

$$A^2 + E = 0.$$

6.3 习题答案

1. 证明：由已知条件，$A(B-C) = 0$，因此只需证明 $AX = 0$ 没有非零解即可，由于 A 列满秩，故得证

2. 解：一般看到这个题都会猜测答案是零，下面严谨证明之：观察到

$$(B+B')(A+A') = BA + B'A' + BA' + B'A = BA + B'A + BA',$$

于是

$$|BA + B'A + BA'| = |(B+B')(A+A')| = |B+B'||A+A'|.$$

接下来只要 $|A+A'|$ 和 $|B+B'|$ 任意一个为零即可。此时观察到 $AB = 0$，所以 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$，所以

$$\min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}(\text{不妨认为是 rank A}) \leq [\frac{n}{2}] = 1011,$$

所以 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} A' \leq 2 \operatorname{rank} A < n.$，于是 $|A+A'| = 0$，所以 $|BA + B'A + BA'| = 0$.

3. 证明：由于存在可交换的条件，因此基于分块矩阵的秩不等式可能比较困难，本题可以对方程的解空间进行讨论。设 $Ax = 0$ 的解空间为 W_A，$Bx = 0$ 的解空间为 W_B，则由题意可知 $W_A \cap W_B = W_C$. 于是

$$\dim W_A + \dim W_B - \dim W_C = \dim(W_A + W_B)$$

，此时只需要再比较 $\dim(W_A+W_B)$ 和 $\dim\operatorname{Ker}AB$ 的大小即可，任取 $a=\alpha+\beta\in W_A+W_B$，其中 $\alpha\in W_A,\beta\in W_B$，则有 $A\alpha+B\beta=0$，由于 A 和 B 可交换，所以 $AB\alpha+AB\beta=0$，即 $AB(a)=0$，因此 $W_A+W_B\subseteq\operatorname{Ker}AB$，所以 $\dim(W_A+W_B)\le\dim\operatorname{Ker}AB$，因此

$$\dim W_A+\dim W_B-\dim W_C\le\dim\operatorname{Ker}AB,$$

即

$$\dim W_A+\dim W_B\le\dim W_C+\dim\operatorname{Ker}AB,$$

由此可得 $r(A)+r(B)\ge r(C)+r(AB)$，得证。

4. 证明：考虑构造矩阵

$$M=\begin{pmatrix}ABC & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

若成立，由于 $r(M)=r(ABC)+r(B)$，所以只需考虑能否将矩阵 M 进行初等变换，得到

$$N=\begin{pmatrix}AB & 0\\ X & BC\end{pmatrix}$$

由于 $r(M)=r(N)$，所以 $r(AB)+r(BC)\le r(ABC)+r(B)$. 接下来尝试将 M 进行初等变换，得到

5.

6. 证明：考虑与 A 可交换的矩阵 B，则有 $AB=BA$，由于 A 是对角矩阵，所以 $\lambda_i a_{ij}=\lambda_j a_{ij}$，即 $(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}=0$，由于 $\lambda_i\ne\lambda_j$，所以 $a_{ij}=0$，即 B 的非对角线元素全为零，所以 B 是对角矩阵。

7. 证明：由上一问可知，A 必是对角矩阵，此时考虑基本矩阵 E_{ij}，则有 $AE_{ij}=E_{ij}A$，所以 $\lambda_i a_{ij}=\lambda_j a_{ij}$，即 $(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}=0$，故 $\lambda_i=\lambda_j$，即 A 是数量矩阵。

8. (a) 证明：由 $A^2=I$ 可知，$(A-I)(A+I)=0$，因此 $r(A-I)+r(A+I)\le n$，又由于 $r(A-I)+r(A+I)\ge r[(A+I)-(A-I)]=n$，所以 $r(A-I)+r(A+I)=n$，得证。

   (b) 证明：同理可得

9. 证明：先从最简单的情况开始，$n=2$，此时 $A_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，满足 $A^2+I=0$，由分块矩阵的乘法，很容易猜测对于一般的 n，可以构造出 $A_n=\begin{pmatrix}A_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_2\end{pmatrix}$，满足 $A_n^2+I=0$.

7 可逆矩阵

7.1 基础概念

1. 逆变换：与原来的变换复合后变为恒等变换：$AA^{-1}=A^{-1}A=I$

2. 矩阵可逆的等价条件：

   - 矩阵满秩
   - 矩阵行列式不为零
   - 对应的齐次线性方程组无非零解
   - $\cdots$

3. 可逆与其他操作的复合

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
- $(A+B)' = A' + B', (AB)' = B'A'$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. 逆矩阵的求法：

(a) 初等变换法：将矩阵 A 变换为单位矩阵 I，同时对单位矩阵进行相同的初等变换，最终得到的矩阵即为 A^{-1}。

(b) 伴随矩阵法：$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

i. 伴随矩阵的定义：伴随矩阵 A^* 是由 A 的代数余子式构成的矩阵，其中 $A^*(i,j) = A_{ji}$

ii. 伴随矩阵的性质：

$$AA^* = A^*A = |A|I, \operatorname{rank} A^* = \begin{cases} n & \text{if } \operatorname{rank} A = n, \\ 1 & \text{if } \operatorname{rank} A = n-1, \\ 0 & \text{if } \operatorname{rank} A < n-1. \end{cases}$$

5. 可逆矩阵的性质：

- 矩阵可逆等价于可以写成一系列初等矩阵的乘积
- 可逆矩阵相乘不改变矩阵的秩

7.2 习题练习

1. 证明一个上（下）三角矩阵主对角线上元素全不为零时必定可逆。

2. 设 A 是数域 K 上的一个 n 阶方阵，$A^k = 0$。证明：

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

3. 设 B 为数域 K 上的可逆 n 阶方阵，又设

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (u_i, v_j \in K).$$

令 $A = B + UV'$。证明：当 $\gamma = 1 + V'B^{-1}U \neq 0$ 时，

$$A^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V'B^{-1}).$$

4. 设 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 $A \in M_n(C)$ 恰有 k 个 $n-1$ 阶子式等于 0，其中 $1 \leq k \leq n-1$。证明：$\det A \neq 0$。

5. 设 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 为 n 阶方阵（$n \geq 2$），求解矩阵方程 $3X = XJ + JX$。

6. 设 A，B，C 都是数域 F 上的 n 阶方阵，$Q = \begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$.

(a) 证明：Q 为可逆矩阵的充分必要条件是 AB 可逆；

(b) 当 Q 可逆时，求逆矩阵 Q^{-1}。

7.3 习题答案

1. 只需证明行列式不为零，显然成立
2. 欲证明某个显式表达式是另一个矩阵的逆矩阵，只需要代入计算即可

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A+A-A^2+A^2\cdots-A^{k-1}+A^{k-1}-A^k=E$$

3. 同理可证
4. 证明：本题一个简单的思考方向是利用伴随矩阵的性质，由题意可得，$\operatorname{rank}A\geq n-1$，因此

$$\operatorname{rank}A^*=\begin{cases} n & \text{if } \operatorname{rank}A=n, \\ 1 & \text{if } \operatorname{rank}A=n-1, \end{cases}$$

   而且由题意可知 A^* 中恰好有 k 个元素为 0. 假如 $\operatorname{rank}A=n-1$，则 $\operatorname{rank}A^*=1$，因此 A^* 中若存在元素为零，则至少有 n 个元素为零，这与题意矛盾，因此 $\operatorname{rank}A=n$，即 A 可逆。

5.
6. (a) 与第一题一样，一个直接的想法是使用行列式证明。但是这里强调一点：一般情况下，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ 和 $|AD|-|BC|$ 并不相等。通常计算分块矩阵的行列式时，我们会使用初等变换操作后再求行列式，即

$$Q\begin{pmatrix} I & -I \\ & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \\ C-B & B \end{pmatrix}$$

   计算出

$$|Q|\begin{vmatrix} I & -I \\ & I \end{vmatrix}=|A||B|$$

   由此可得 $|Q|=|A||B|$，因此 Q 可逆的充分必要条件是 AB 可逆。

   (b) 在第一问的基础上，继续进行初等变换，可以取

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} I & -I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -(C-B)B^{-1} \\ & I \end{pmatrix}=I,$$

   于是就可以写出

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -(C-B)B^{-1} \\ & I \end{pmatrix}$$

8 相抵与相似

8.1 基础概念

1. 等价类：对一类研究对象依据某条性质进行分类，同一种类别内部具有该属性相同，不同类别之间属性不同。通常要求该分类满足三条性质：
   - 反身性：$\forall a\in S, a\sim a$
   - 对称性：$\forall a,b\ a\sim b\rightarrow b\sim a$
   - 传递性：$\forall a,b,c\ a\sim b, b\sim c\rightarrow a\sim c$
2. 相抵：
   - 对任意行列数相同的矩阵进行分类，分类依据是矩阵的秩

- 如果矩阵 A 可以经过一系列初等行变换和初等列变换变成矩阵 B，则称 A 与 B 相抵。
- 相抵标准形：$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. 相似：

- 对同级方阵进行分类，分类依据是特征多项式和最小多项式
- 设 A，B 为 n 阶矩阵，如果有 n 阶可逆矩阵 P 存在，使得 $P^{-1}AP = B$ 则称矩阵 A 与 B 相似。
- 相似标准形：Jordan 标准形

4. 相似的性质：

- 相似矩阵具有相同的秩
- 相似矩阵具有相同的行列式
- 相似矩阵具有相同的迹

5. 特征值与特征空间：

- 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，如果 K^n 中有非零列向量 α, 使得 $A\alpha = \lambda_0\alpha, \quad \lambda_0 \in K$，则称 λ_0 是 A 的一个特征值，α 是 A 属于 λ_0 的一个特征向量
- 特征值和特征向量的求法：令特征多项式 $|\lambda I - A| = 0$
- 每个特征值至少有一个特征向量，每个特征向量之可能对应一个特征值，0 不是特征向量

6. 对角化：

- 定义：A 有 n 个线性无关的特征向量
- 等价条件：由于属于不同特征值的特征向量线性无关，故该条件等价于所有特征子空间的维数之和等于方阵阶数
- 一个推论：方阵特征值个数等于阶数时可以对角化
- 特殊情况：实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵

7. 各类分解：LU 分解、QR 分解、奇异值分解

8.2 习题练习

1. 设 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 $r(r \neq 0)$. 证明：存在 $s \times r$ 列满秩矩阵 P_1 与 $r \times n$ 行满秩矩阵 Q_1, 使得

$$A = P_1 Q_1.$$

2. 设实数域 $\mathbb{R}$ 上的矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

(1) 求正交矩阵 Q, 使得 $Q^T AQ$ 为对角矩阵 D, 其中 Q^T 为 Q 的转置；

(2) 求正定矩阵 C, 使得 $C^2 = (a+3)I - A$, 其中 I 为 3 阶单位矩阵。

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求出 A^{2024}

4. 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$, 已知-5 是 A 的重数为 2 的特征值。

   (1) 求 a 的值。

   (2) 求一个正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

5. 设 n 一阶方阵 A 满足 $A^2=2A$，证明 A 可以对角化。

6. 设 K 为数域，n 是正整数.V 是 K 上的线性空间，且 $\dim V=n$. 再设 $\mathbf{T}\in\mathrm{Hom}(V,V)$ 在 K 中有 n 个互不相同的特征值. 证明：如果 $\mathbf{S}\in\mathrm{Hom}(V,V)$ 满足 $\mathbf{ST}=\mathbf{TS}$, 那么 $\mathbf{S}$ 可对角化

7. 设 n 为正整数，A 为 n 阶半正定实对称矩阵. 求证：对任意的 n 维实列向量 α,β, 都有
$$(\alpha^TA\beta)^2\le(\alpha^TA\alpha)\left(\beta^TA\beta\right)$$
   其中 α^T 表示 α 的转置.

8. * 如果 n 级实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，则 A 一定正交相似于上三角矩阵。

8.3 习题答案

1. 考虑 A 的相抵标准形，有
$$A=P_{s\times s}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_{n\times n}$$
   其中 P 和 Q 分别为 $s\times s$ 和 $n\times n$ 的可逆矩阵。此时，观察到
$$P=\begin{pmatrix}P_1 & P_2\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0\end{pmatrix}$$
   于是可以得到
$$A=P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}P_1 & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}=P_1Q_1$$

2. (a) 只需考虑对于 A 对角化即可

   (b) 观察到
$$B=(a+3)I-A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$
   是一个实对称矩阵，于是可以对角化，得到
$$B=T^{-1}DT=T^{-1}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}T$$
   其中，T 为正交矩阵，于是显然
$$C^2=B=T^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}TT^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}T$$
   于是可以得到
$$C=T^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}T$$

3. 将 A 对角化，得到

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P$$

于是

$$A^{2024} = P^{-1}\begin{pmatrix} 3^{2024} & 0 \\ 0 & (-1)^{2024} \end{pmatrix} P$$

4. (a) 只需求解特征多项式 $|\lambda I - A| = 0$ 即可，得到

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-5a)(\lambda-4) = 0$$

所以 $a = -1$.

(b) 由于 A 是实对称矩阵，所以可以对角化，只需求解特征向量后正交化即可

5. 证明：由于 $A^2 = 2A$，由上一节的知识可知 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A - 2I) = n$，因此 $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Ker}(A - 2I) = n$，因此 A 的特征子空间维数之和为 n，因此 A 可以对角化。

6. 证明：由题意可知，$\mathbf{T}$ 的特征值全为实数，且互不相同，因此 $\mathbf{T}$ 可以对角化，而且特征值和特征向量一一对应，不妨假设其特征值和特征向量对为 λ_i, α_i。于是

$$\mathbf{ST}\alpha_i = \mathbf{S}\lambda_i\alpha_i = \lambda_i\mathbf{S}\alpha_i,$$

又由于 $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$，因此

$$\mathbf{TS}\alpha_i = \lambda_i\mathbf{S}\alpha_i,$$

因此 $\mathbf{S}\alpha_i$ 也是 $\mathbf{T}$ 的特征向量，且对应的特征值仍为 λ_i，因此 $\mathbf{S}$ 也可以对角化。

7. 证明：A 对角化可以得到

$$A = T^{-1}DT$$

其中，T 为正交矩阵，D 为对角矩阵，且对角线上元素全非负，此时可以找出 C 满足 $D = C^2$，C 为对角矩阵，对角线上元素为 $C_{ii} = \sqrt{D_{ii}}$，于是可以得到

$$\alpha^T A\beta = \alpha^T T^{-1}C^2 T\beta = (CT\alpha)^T(CT\beta), \alpha^T A\alpha = (CT\alpha)^T(CT\alpha), \beta^T A\beta = (CT\beta)^T(CT\beta)$$

由柯西不等式，显然得证

8. 证明：

9 合同变换

9.1 基础概念

1. 实对称矩阵

- 实数域上的对称矩阵：$A = A'$
- 实对称矩阵的特征值全为实数
- 实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵

2. 合同变换

- 对实对称矩阵进行分类，分类依据是惯性系数

- 数域 K 上两个 n 级矩阵 A 与 B, 如果存在 K 上的一个可逆矩阵 C, 使得 $C'AC=B$, 则称 A 与 B 合同。
- 合同标准型：规范形

3. 二次型

- 配方法：依次解决各平方项，若无平方项则先给出平方项。
- 成对初等行列变换法：类似于求逆矩阵时的初等行列变换法。
- 规范形：二次项系数全为 1 或 -1 的二次型。此时正项的系数个数为正惯性系数，负项系数个数为负惯性系数。

4. 正定矩阵

- 正惯性系数 = 秩 = 方程阶数
- 正定矩阵二次型一定大于零
- 顺序主子式全部大于零

5. 斜对称矩阵

9.2 习题练习

1. 用正交替换把下列实二次型化成标准形：

   (1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

   (2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$.

2. 设实二次型 $f(X)=f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$, $a\in\mathbb{R}$ 为参数，可用非退化线性替换 $X=CY$ 化成二次型
$$g(Y)=g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2.$$

   (1) 求参数 a 的值，

   (2) 求把 $f(X)$ 化成 $g(Y)$ 的非退化线性替换中的可逆矩阵 C。

3. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，t 的取值范围。

4. 给定二次型
$$f=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2,$$
   其中
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$
   是一个实数矩阵. 证明：f 的秩等于 $r(A)$.

5. 证明：数域 K 上的斜对称矩阵一定合同于下述形式的分块对角矩阵：
$$\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 \end{bmatrix},(0),\cdots,(0)\right\}.$$

6. 给定两个 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{X}'AX, g=X'BX$.

   (1) 举例说明 f 与 g 均非正定二次型时,$f+g=X'\left(A+B\right)X$ 仍有可能为正定二次型；

   (2) 如果 f 和 g 的正惯性指数都小于 $\frac{n}{2}$, 证明 $f+g$ 必为非正定

7. * 用可逆线性变数替换化下列二次型成标准形:

(1) $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n}^n x_i x_j$;

(2) $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$, 其中 $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

9.3 习题答案

1. (a)

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

求其特征值与正交特征向量（按单位化并两两正交）可得

$$\lambda_1 = 1\ (\text{重数}2), \quad \lambda_3 = 10,$$

取正交基

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\,1,\,0)^T, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,\,4,\,5)^T, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{3}(-1,\,-2,\,2)^T, \end{aligned}$$

则

$$Q = [\,\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\,], \qquad Q^TQ = I, \quad A = Q\mathrm{diag}(1,1,10)Q^T.$$

令

$$y = Q^Tx, \quad (x_1,x_2,x_3)^T = Q\,(y_1,y_2,y_3)^T,$$

则

$$f(x) = y^T\mathrm{diag}(1,1,10)\,y = y_1^2 + y_2^2 + 10\,y_3^2.$$

(b)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_2\ -\ 2x_3x_4.$$

对应矩阵分为两块

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对 (x_1,x_2) 子空间作 45° 旋转:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}, \\ y_2 = \dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad 2x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2.$$

对 (x_3,x_4) 子空间同理:

$$\begin{cases} y_3 = \dfrac{x_3+x_4}{\sqrt{2}}, \\ y_4 = \dfrac{x_3-x_4}{\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad -2x_3x_4 = -\big(y_3^2 - y_4^2\big) = -y_3^2 + y_4^2.$$

合起来令

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T, \qquad Q^T x = y,$$

即得标准形

$$f(x) = y_1^2 - y_2^2 \; - \; y_3^2 + y_4^2.$$

2. (a) 将以下二次型通过可逆线性变换化为标准形。

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j.$$

取新变量

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ y_2 = x_1 - x_2, \\ y_3 = x_2 - x_3, \\ \quad \vdots \\ y_n = x_{n-1} - x_n. \end{cases}$$

该变换可逆（雅可比行列式非零）。直接计算可得

$$Q(x) = \frac{n+1}{2}\, y_1^2 \; + \; \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} y_k^2.$$

故标准形为

$$Q(x) = \frac{n+1}{2}\, y_1^2 + \frac{1}{2}\, y_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}\, y_n^2.$$

(b)

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(x_i - \bar{x}\bigr)^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

取新变量

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ \quad \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - x_n, \\ y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \end{cases}$$

此变换亦可逆。计算可得

$$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 \; + \; 0 \cdot y_n^2.$$

故标准形为

$$Q(x) = y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2$$

10 线性空间相关概念

10.1 基础概念

1. 线性空间：满足线性运算封闭性的集合
   (a) 线性运算：加法、数乘
   (b) 线性空间的性质：加法交换律、加法结合律、零元、负元、单位元、数乘的分配律和结合律
2. 基

(a) 基的定义：线性无关且生成空间

(b) 基的性质：唯一性、维数

(c) 基的意义：简化表示

3. 子空间

(a) 子空间的定义：满足线性运算封闭性的子集

(b) 子空间的性质：维数小于等于父空间

(c) 子空间的证明：线性运算封闭性

4. 交、和与直和

(a) 交与和（注意不是并集，因为并集无法保证线性运算封闭）：两个子空间的交与和仍然是子空间

(b) 维数公式：$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$

(c) 直和：交集为零向量空间的子空间之和

i. V_1+V_2 是直和

ii. $V_1\cap V_2=\{0\}$

iii. V_1+V_2 零向量表法唯一

iv. $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

v. V_1 的一个基与 V_2 的一个基合起来是 V_1+V_2 的一个基

5. 同构

(a) 基于定义：一一对应，保线性的映射

(b) 基于性质：维数相同

6. 线性映射

(a) 线性运算

(b) Hom (V,V') 是线性空间，维数为 $\dim V\times\dim V'$

7. 线性变换的矩阵表示

(a) 唯一决定性：$(\mathbf{A}\alpha_1,\mathbf{A}\alpha_2,\cdots,\mathbf{A}\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$

(b) 过渡矩阵：从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵 P 满足 $B=P^{-1}AP$

10.2 习题练习

1. 在数域 K 上全体 n 阶对称方阵所成的线性空间 V 中定义变换

$$AX=T'XT,$$

其中 T 为一个固定的 n 阶方阵。证明：A 是 V 中一个线性变换。

2. 设线性空间 V 分解为子空间 M,N 的直和：$V=M\oplus N$。令 P 为关于此直和分解式的 V 对 M 的投影变换，证明：

(1) $P^2=P$；

(2) 若 $M\neq V$，证明 P 不可逆；

(3) 命 P_1 表示 V 关于上述直和分解式对子空间 N 的投影变换，证明：$PP_1=P_1P=0$。

3. A 为 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

而 V 是所有与 A 可交换的 n 阶实方阵全体，即 $V = \{B \mid BA = AB, B \text{ 为} n \text{ 阶实方阵}\}$。证明：

（1）V 是线性空间；

（2）V 的维数 $\dim V = n$。

4. 设三维线性空间 V 内一个线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵；

(2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵（$k \neq 0$）；

(3) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵。

5. 设 A, B 是数域 K 上的 $m \times n$ 矩阵，且 $r(A) = r(B)$。设齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的解空间分别是 U, V。证明存在 K 上可逆 n 阶方阵 T，使得 $f(Y) = TY$（$Y \in U$）是 U 到 V 的同构映射。

6. 在 n 维线性空间中，设有线性变换 $\mathcal{A}$ 与向量 ξ，使 $\mathcal{A}^{n-1}\xi \neq 0$，但 $\mathcal{A}^n\xi = 0$。求证：$\mathcal{A}$ 在某一组基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

7. 设 $S(A) = \{B \in P^{n\times n} \mid A \in P^{n\times n} \text{ 且} AB = O\}$。

(1) 证明：$S(A)$ 是 $P^{n\times n}$ 的子空间；

(2) 设 $\operatorname{rank} A = r$，求 $S(A)$ 的一个基和维数。

8. W 为实 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，且 W 中的每个非零向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的零分量的个数不超过 r。证明：$\dim W \leq r + 1$。

9. 设 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的子空间且 $W_i \neq V, i = 1, 2, \cdots, s$。证明：

（1）每个 W_i 都是 V 的若干个 $n-1$ 维子空间的交；

（2）$W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s \neq V$。

（3）存在 V 的一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，使得 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\} \cap (W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s) = \emptyset$。

10. 设 V_1, V_2 分别是齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间。证明 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 是 V_1, V_2 的直和。

11. 令 $F[x]_n$ 表示数域 F 上所有次数 $< n$ 的多项式及零多项式作成的线性空间，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ 两两互异。令

$$f_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - a_j), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明：$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是 $F[x]_n$ 的一个基。

12. 求 3 阶正交矩阵 A 使得欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上的变换 $\alpha \mapsto A\alpha$ 是绕向量 $(1, 2, 2)^T$ 所在直线旋转 $180°$。

10.3 习题答案

1.